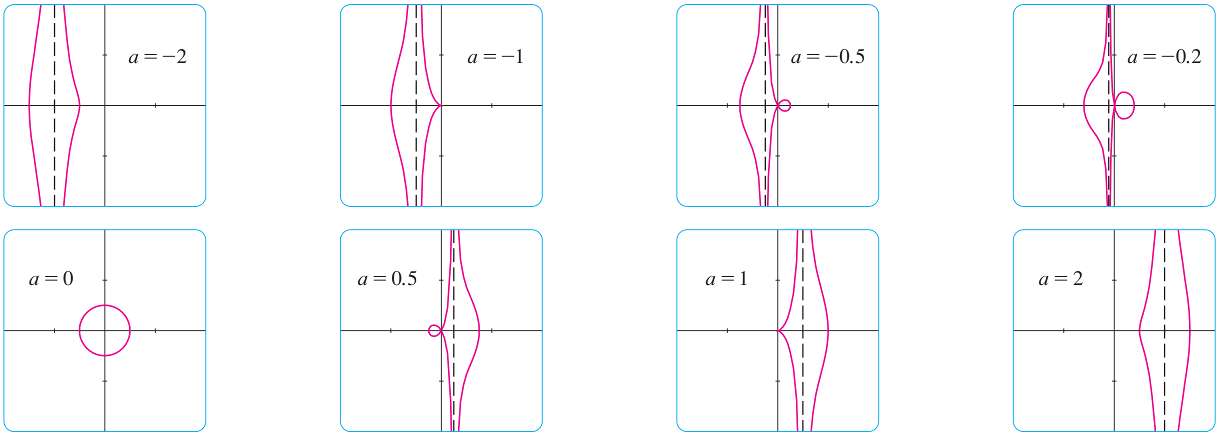


FIGURA 17 Miembros de la familia $x = a + \cos t$, $y = a \tan t + \operatorname{sen} t$, graficadas en el rectángulo de vista $[-4, 4]$ por $[-4, 4]$

Cuando $a < -1$, ambas ramas son suaves, pero cuando a llega a -1, la rama derecha adquiere un punto agudo llamado *cúspide*. Para a entre -1 y 0 la cúspide se convierte en un bucle, que se vuelve más grande conforme a se aproxima a 0. Cuando $a = 0$, ambas ramas se juntan y forman una circunferencia (véase el ejemplo 2). Para a entre 0 y 1, la rama izquierda tiene un bucle, el cual se contrae para volverse una cúspide cuando $a = 1$. Para $a > 1$, las ramas se suavizan de nuevo y cuando a crece más, se curvan menos. Observe que las curvas con a positiva son reflexiones respecto al eje y de las curvas correspondientes con a negativa.

Estas curvas se llaman **concoides de Nicomedes** en honor del erudito de la antigua Grecia, Nicomedes. Las llamó concoides porque la forma de sus ramas externas se asemeja a la concha de un caracol o de un mejillón.

10.1 Ejercicios

1-4 Bosqueje la curva ubicando puntos por medio de las ecuaciones paramétricas. Indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

1. $x = t^2 + t, \quad y = t^2 - t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

2. $x = t^2, \quad y = t^3 - 4t, \quad -3 \leqslant t \leqslant 3$

3. $x = \cos^2 t, \quad y = 1 - \operatorname{sen} t, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi/2$

4. $x = e^{-t} + t, \quad y = e^t - t, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

5-10

a) Bosqueje la curva usando las ecuaciones paramétricas para ubicar puntos. Indique con una flecha la dirección en la cual se traza la curva cuando t aumenta.

b) Elimine el parámetro para hallar la ecuación cartesiana de la curva.

5. $x = 3 - 4t, \quad y = 2 - 3t$

6. $x = 1 - 2t, \quad y = \frac{1}{2}t - 1, \quad -2 \leqslant t \leqslant 4$

7. $x = 1 - t^2, \quad y = t - 2, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

8. $x = t - 1, \quad y = t^3 + 1, \quad -2 \leqslant t \leqslant 2$

9. $x = \sqrt{t}, \quad y = 1 - t$

10. $x = t^2, \quad y = t^3$

11-18

a) Elimine el parámetro para hallar una ecuación cartesiana de la curva.

b) Bosqueje la curva e indique con una flecha la dirección en que se traza la curva cuando crece el parámetro.

11. $x = \operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta, \quad y = \cos \frac{1}{2}\theta, \quad -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$

12. $x = \frac{1}{2} \cos \theta, \quad y = 2 \operatorname{sen} \theta, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi$

13. $x = \operatorname{sen} t, \quad y = \csc t, \quad 0 < t < \pi/2$

14. $x = e^t - 1, \quad y = e^{2t}$

15. $x = e^{2t}, \quad y = t + 1$

16. $y = \sqrt{t + 1}, \quad y = \sqrt{t - 1}$

17. $x = \operatorname{senh} t, \quad y = \cosh t$

18. $x = \tan^2 \theta, \quad y = \sec \theta, \quad -\pi/2 < \theta < \pi/2$

Se requiere calculadora graficadora o computadora **1.** Tareas sugeridas disponibles en stewartcalculus.com

19-22 Describa el movimiento de una partícula con posición (x, y) cuando t varía en el intervalo dado.

19. $x = 3 + 2\cos t, \quad y = 1 + 2\,\text{sen}\,t, \quad \pi/2 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

20. $x = 2\,\text{sen}\,t, \quad y = 4 + \cos t, \quad 0 \leqslant t \leqslant 3\pi/2$

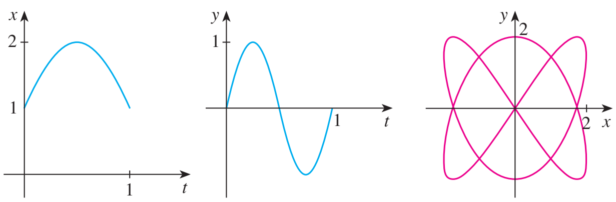
21. $x = 5\,\text{sen}\,t, \quad y = 2\cos t, \quad -\pi \leqslant t \leqslant 5\pi$

22. $x = \text{sen}\,t, \quad y = \cos^2 t, \quad -2\pi \leqslant t \leqslant 2\pi$

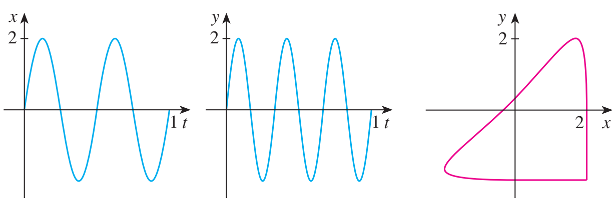
23. Suponga que una curva está dada por las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, donde el rango de f es $[1, 4]$ y el rango de g es $[2, 3]$. ¿Qué podemos decir acerca de la curva?

24. Relacione las gráficas de las ecuaciones paramétricas $x = f(t)$ y $y = g(t)$ en a)-d) con las curvas paramétricas etiquetadas I-IV. Dé razones para sus elecciones.

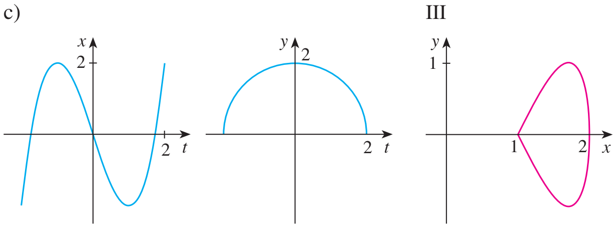
a) I



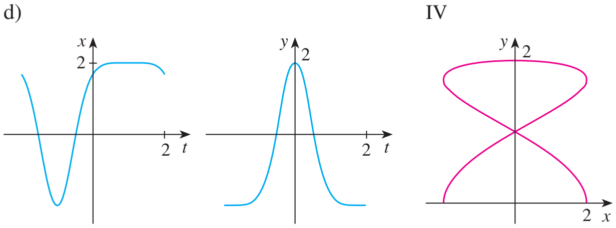
b) II



c) III

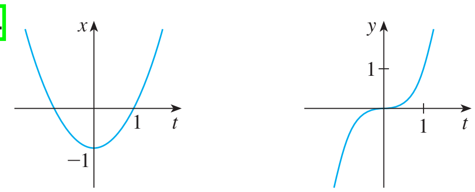


d) IV

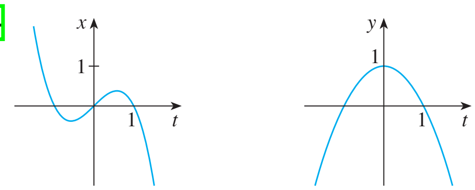


25-27 Use las gráficas de $x = f(t)$ y $y = g(t)$ para bosquejar la curva paramétrica $x = f(t)$, $y = g(t)$. Indique con flechas la dirección en que se traza la curva cuando t crece.

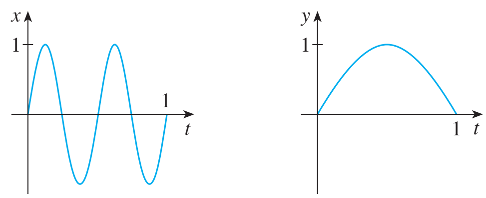
25.



26.



27.



28. Relacione las curvas paramétricas con las curvas etiquetadas I-VI. Dé razones para sus elecciones. (No utilice dispositivos de graficación.)

a) $x = t^4 - t + 1, \quad y = t^2$

b) $x = t^2 - 2t, \quad y = \sqrt{t}$

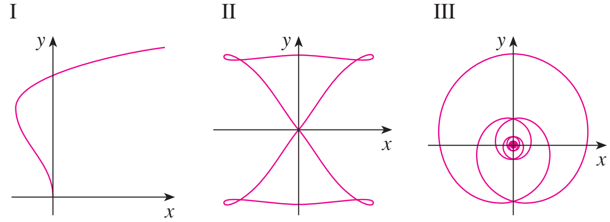
c) $x = \text{sen}\,2t, \quad y = \text{sen}(t + \text{sen}\,2t)$

d) $x = \cos 5t, \quad y = \text{sen}\,2t$

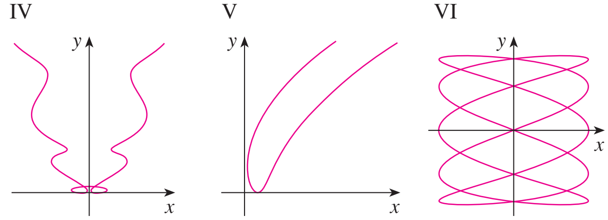
e) $x = t + \text{sen}\,4t, \quad y = t^2 + \cos 3t$

f) $x = \dfrac{\text{sen}\,2t}{4 + t^2}, \quad y = \dfrac{\cos 2t}{4 + t^2}$

I II III



IV V VI



29. Grafique la curva $x = y - 2 \operatorname{sen} \pi y$.

30. Grafique las curvas $y = x^3 - 4x$ y $x = y^3 - 4y$, y encuentre sus puntos de intersección con una aproximación de un decimal.

31. a) Demuestre que las ecuaciones paramétricas

$$x = x_1 + (x_2 - x_1)t \qquad y = y_1 + (y_2 - y_1)t$$

donde $0 \leqslant t \leqslant 1$, describen el segmento de recta que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$.

b) Encuentre las ecuaciones paramétricas para representar el segmento de recta de $(-2, 7)$ a $(3, -1)$.

32. Utilice un dispositivo de graficación y el resultado del ejercicio 31a) para dibujar el triángulo con vértices $A(1, 1)$, $B(4, 2)$ y $C(1, 5)$.

33. Encuentre ecuaciones paramétricas para la trayectoria de una partícula que se mueve a lo largo de la circunferencia $x^2 + (y - 1)^2 = 4$ de la manera que se describe.

a) Una vuelta en dirección de las manecillas del reloj, empezando en (2, 1).

b) Tres vueltas en dirección contraria a las manecillas del reloj, empezando en (2, 1)

c) Media vuelta en dirección contraria a las manecillas del reloj, empezando en (0, 3).

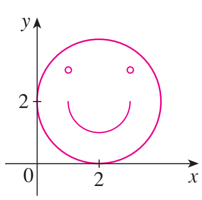
34. a) Encuentre ecuaciones paramétricas para la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. [*Sugerencia*: modifique las ecuaciones de la circunferencia del ejemplo 2.]

b) Utilice estas ecuaciones paramétricas para graficar la elipse cuando $a = 3$ y $b = 1, 2, 4$ y 8.

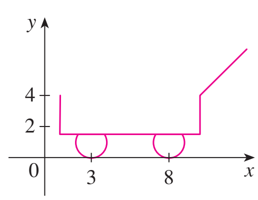
c) ¿Cómo cambia la forma de la elipse cuando b varía?

35-36 Utilice una calculadora graficadora o computadora para reproducir el dibujo

35.



36.



37-38 Compare las curvas representadas por las ecuaciones paramétricas ¿Cómo difieren?

37. a) $x = t^3, \quad y = t^2$ b) $x = t^6, \quad y = t^4$
c) $x = e^{-3t}, \quad y = e^{-2t}$

38. a) $x = t, \quad y = t^{-2}$ b) $x = \cos t, \quad y = \sec^2 t$
c) $x = e^t, \quad y = e^{-2t}$

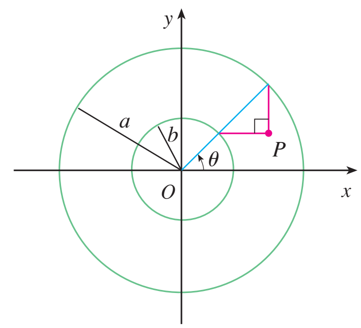
39. Deduzca las ecuaciones 1 para el caso $\pi/2 < \theta < \pi$.

40. Sea P un punto a una distancia d del centro de una circunferencia de radio r. La curva trazada por P cuando el círculo rueda a lo largo de una línea recta se llama **trocoide**. (Piense en el movimiento de un punto sobre el rayo de una rueda de bicicleta.) La cicloide es el caso especial de una trocoide con $d = r$. Utilizando el mismo parámetro θ como para la cicloide y, asumiendo que la recta es el eje de las x y $\theta = 0$ cuando P es uno de sus puntos mínimos, demuestre que las ecuaciones paramétricas de la trocoide son

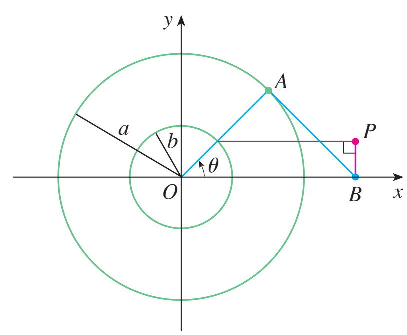
$$x = r\theta - d \operatorname{sen} \theta \qquad y = r - d \cos \theta$$

Trace la trocoide para los casos $d < r$ y $d > r$.

41. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas para la curva que consiste de todas las posibles posiciones del punto P en la figura, utilizando el ángulo θ como parámetro. Después elimine el parámetro e identifique la curva.



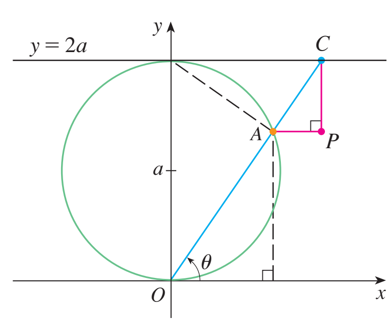
42. Si a y b son números fijos, encuentre las ecuaciones paramétricas de la curva que consiste de todas las posiciones posibles del punto P en la figura, usando el ángulo θ como parámetro. El segmento de recta AB es tangente a la circunferencia más grande.



43. Una curva, llamada **bruja de María Agnesi**, consiste de todas las posibles posiciones del punto P en la figura. Demuestre que las ecuaciones paramétricas para esta curva pueden expresarse como

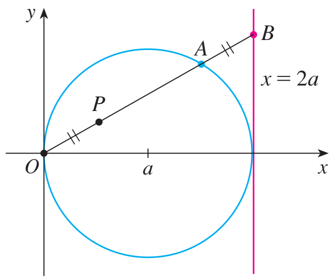
$$x = 2a \cot \theta \qquad y = 2a \operatorname{sen}^2 \theta$$

Trace la curva.



44. a) Encuentre las ecuaciones paramétricas para el conjunto de todos los puntos P como los que se muestran en la figura, tales que $|OP| = |AB|$. (Esta curva se llama **cisoide de Diocles** en honor al sabio griego Diocles, quien introdujo la cisoide como un método gráfico para construir el lado de un cubo cuyo volumen es dos veces el de un cubo dado.)

b) Utilice la descripción geométrica para dibujar a mano un bosquejo de la curva. Verifique su trabajo utilizando las ecuaciones paramétricas para graficar la curva.



45. Suponga que la posición de una partícula en el tiempo t está dada por

$$x_1 = 3 \operatorname{sen} t \qquad y_1 = 2 \cos t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

y la posición de una segunda partícula está dada por

$$x_2 = -3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

a) Grafique las trayectorias de ambas partículas ¿Cuántos puntos de intersección hay?

b) ¿Algunos de estos puntos de intersección son *puntos de colisión*? En otras palabras ¿las partículas están en el mismo lugar al mismo tiempo? Si es así, encuentre los puntos de colisión.

c) Describa qué pasa si la trayectoria de la segunda partícula está dada por

$$x_2 = 3 + \cos t \qquad y_2 = 1 + \operatorname{sen} t \qquad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$$

46. Si un proyectil es disparado con una velocidad inicial de v_0 metros por segundo a un ángulo α por encima de la horizontal y se supone que la resistencia del aire es despreciable, entonces su posición después de t segundos está dada por las ecuaciones paramétricas

$$x = (v_0 \cos \alpha)t \qquad y = (v_0 \operatorname{sen} \alpha)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

donde g es la aceleración debida a la gravedad (9.8 m/s^2).

a) Si un arma es disparada con $\alpha = 30°$ y $v_0 = 500$ m/s, ¿cuándo caerá la bala al suelo? ¿A qué distancia del arma llegará al suelo? ¿Cuál es la altura máxima que alcanzará la bala?

b) Utilice un dispositivo de graficación para verificar sus respuestas al inciso a). Después grafique la trayectoria del proyectil para otros valores del ángulo α para ver dónde pegará en el suelo. Resuma sus hallazgos.

c) Demuestre que la trayectoria es parabólica eliminando el parámetro.

47. Investigue la familia de curvas definidas por las ecuaciones paramétricas $x = t^2$, $y = t^3 - ct$. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando c crece? Ilustre graficando varios miembros de la familia.

48. Las **curvas catastróficas cola de golondrina** están definidas por las ecuaciones paramétricas $x = 2ct - 4t^3$, $y = -ct^2 + 3t^4$. Grafique varias de estas curvas. ¿Qué características tienen en común las curvas? ¿Cómo cambian cuando c crece?

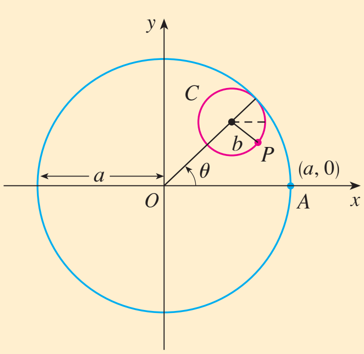
49. Grafique varios miembros de la familia de curvas con ecuaciones paramétricas $x = t + a \cos t$, $y = t + a \operatorname{sen} t$, donde $a > 0$. ¿Cómo cambia la forma de la curva cuando a crece? ¿Para cuáles valores de a la curva tiene un bucle?

50. Grafique varios miembros de la familia de curvas $x = \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} nt$, $y = \cos t + \cos nt$ donde n es un entero positivo. ¿Qué características tienen en común las curvas? ¿Qué pasa cuando n crece?

51. Las curvas con ecuaciones $x = a \operatorname{sen} nt$, $y = b \cos t$ se llaman **figuras de Lissajous**. Investigue cómo varían estas curvas cuando varían a, b y n. (Tome n como un entero positivo.)

52. Investigue la familia de curvas definidas por las ecuaciones paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} ct$, donde $c > 0$. Empiece por hacer c entero positivo y vea qué pasa con la forma cuando c crece. Después explore algunas de las posibilidades que ocurren cuando c es una fracción.

PROYECTO DE LABORATORIO — CIRCUNFERENCIAS QUE CORREN ALREDEDOR DE CIRCUNFERENCIAS



En este proyecto investigamos familias de curvas, llamadas *hipocicloides* y *epicicloides*, que son generadas por el movimiento de un punto sobre una circunferencia que rueda dentro o fuera de otra circunferencia.

1. Una **hipocicloide** es una curva trazada por un punto fijo P sobre la circunferencia C de radio b cuando C rueda sobre el interior de la circunferencia con centro en O y radio a. Demuestre que si la posición inicial de P es $(a, 0)$ y el parámetro θ se elige como en la figura, entonces las ecuaciones paramétricas de la hipocicloide son

$$x = (a - b) \cos \theta + b \cos\left(\frac{a - b}{b}\,\theta\right) \qquad y = (a - b) \operatorname{sen} \theta - b \operatorname{sen}\left(\frac{a - b}{b}\,\theta\right)$$

Se requiere calculadora graficadora o computadora